Prof. Dr. Alfred Toth

Kleine Arithmetik der semiotischen oktadischen Spurenmatrix

1. Eine semiotische Kategorie kann im einfachsten Fall durch

Kat = ((a, b), $\rightarrow$),

d.h. ein a $\in$ DOM, ein b $\in$ COD und einen Morphismus definiert werden, gesetzt, die Kompositionen, Assoziationen und Identitäten sind definiert (vgl. z.B. Schubert 1970, S. 1 ff.).

Dagegen benötigt man zur Definition einer semiotischen Spur

Sp = (a, $\rightarrow$)

nur ein a $\in$ {1, 2, 3} sowie eine beliebige Abbildung $\rightarrow_x$ mit x $\in$ {α, β} (da natürlich bei einer triadischen Relation zwei Abbilungstypen genügen) (vgl. Toth 2010a).

2. Das bedeutet jedoch nicht, dass Sp $\subset$ Kat gilt, denn vgl.

a$\rightarrow$, a$\leftarrow$; $\rightarrow$a, $\leftarrow$a,

d.h. a kann im vierfacher Gestalt auftreten, entsprechend b, womit wir a.b´s der foglenden Form bekommen

a$\rightarrow$b, a$\leftarrow$b, b$\rightarrow$a, b$\leftarrow$a,

von denen die zweite und vierte im klassischen semiotischen Kategoriensystem jedoch nicht definiert sind.

3. Wenn man nun alle möglichen Kombinationen von dyadischen Spuren zusammenstellt, erhält man folgende vollständige semiotische Spurenmatrix (Toth 2010b):

	→a	←a	a→	a←	→b	←b	b→	b←
→a	→a→a	→a←a	→aa→	→aa←	→a→b	→a←b	→ab→	→ab←
←a	←a→a	←a←a	←aa→	←aa←	←a→b	←a←b	←ab→	←ab←
a→	a→→a	a→←a	a→a→	a→a←	a→→b	a→←b	a→b→	a→b←
a←	a←→a	a←←a	a←a→	a←a←	a←→b	a←←b	a←b→	a←b←
→b	→b→a	→b←a	→ba→	→ba←	→b→b	→b←b	→bb→	→bb←
←b	←b→a	←b←a	←ba→	←ba←	←b→b	←b←b	←bb→	←bb←
b→	b→→a	b→←a	b→a→	b→a←	b→→b	b→←b	b→b→	b→b←
b←	b←→a	b←←a	b←a→	b←a←	b←→b	b←←b	b←b→	b←b←

Wir können nun die Morphismen vereinfachen, indem wir festsetzen:

$x\rightarrow := \alpha \qquad \rightarrow x := \dot{\alpha}$

$x\leftarrow := \alpha^{\circ} \qquad \leftarrow x := \dot{\alpha}^{\circ}$ ($x \in \{a, b\}$),

wobei $\alpha \in$ MORPH, $\alpha' \in$ HETEROMORPH ist (vgl. Kaehr 2007).

Damit erhalten wir die obige Matrix in folgender Gesalt:

	$\acute{\alpha}$	$\acute{\alpha}^{o}$	α	α^{o}	β'	β'^{o}	β	β^{o}
$\acute{\alpha}$	$\acute{\alpha}\,\acute{\alpha}$	$\acute{\alpha}\,\acute{\alpha}^{o}$	$\acute{\alpha}\,\alpha$	$\acute{\alpha}\,\alpha^{o}$	$\acute{\alpha}\,\beta'$	$\acute{\alpha}\,\beta'^{o}$	$\acute{\alpha}\,\beta$	$\acute{\alpha}\,\beta^{o}$
$\acute{\alpha}^{o}$	$\acute{\alpha}^{o}\,\acute{\alpha}$	$\acute{\alpha}^{o}\,\acute{\alpha}^{o}$	$\acute{\alpha}^{o}\alpha$	$\acute{\alpha}^{o}\alpha^{o}$	$\acute{\alpha}^{o}\beta'$	$\acute{\alpha}^{o}\beta'^{o}$	$\acute{\alpha}^{o}\beta$	$\acute{\alpha}^{o}\beta^{o}$
α	$\alpha\,\acute{\alpha}$	$\alpha\,\acute{\alpha}^{o}$	$\alpha\alpha$	$\alpha\alpha^{o}$	$\alpha\beta'$	$\alpha\beta'^{o}$	$\alpha\beta$	$\alpha\beta^{o}$
α^{o}	$\alpha^{o}\,\acute{\alpha}$	$\alpha^{o}\,\acute{\alpha}^{o}$	$\alpha^{o}\alpha$	$\alpha^{o}\alpha^{o}$	$\alpha^{o}\beta'$	$\alpha^{o}\beta'^{o}$	$\alpha^{o}\beta$	$\underline{\alpha^{o}\beta^{o}}$
β'	$\beta'\,\acute{\alpha}$	$\beta'\,\acute{\alpha}^{o}$	$\beta'\alpha$	$\beta'\alpha^{o}$	$\beta'\beta'$	$\beta'\beta'^{o}$	$\beta'\beta$	$\beta'\beta^{o}$
β'^{o}	$\beta'^{o}\,\acute{\alpha}$	$\beta'^{o}\,\acute{\alpha}^{o}$	$\beta'^{o}\alpha$	$\beta'^{o}\alpha^{o}$	$\beta'^{o}\beta'$	$\beta'^{o}\beta'^{o}$	$\beta'^{o}\beta$	$\beta'^{o}\beta^{o}$
β	$\beta\,\acute{\alpha}$	$\beta\,\acute{\alpha}^{o}$	$\underline{\beta\alpha}$	$\beta\alpha^{o}$	$\beta\beta'$	$\beta\beta'^{o}$	$\beta\beta$	$\beta\beta^{o}$
β^{o}	$\beta^{o}\,\acute{\alpha}$	$\beta^{o}\,\acute{\alpha}^{o}$	$\beta^{o}\alpha$	$\beta^{o}\alpha^{o}$	$\beta^{o}\beta'$	$\beta^{o}\beta'^{o}$	$\beta^{o}\beta$	$\beta^{o}\beta^{o}$

Man kann allerdings nicht weiter gehen:

Wir definieren als „Basispuren“:

$a := a\rightarrow = \alpha$

$b := b\rightarrow = \beta$

sowie die beiden spurentheoretischen Operationen

K = Konversion: $K(X) = X^{o}$

S = Spiegelung (Reflexion): $S(X\rightarrow) = \rightarrow X$

Damit kann man die oktadische Matrix noch stärker vereinfacht darstellen, z.B. lautet dann die letzte Zeile:

β^{o}	$\beta^{o}\,\acute{\alpha}$	$\beta^{o}\,\acute{\alpha}^{o}$	$\beta^{o}\alpha$	$\beta^{o}\alpha^{o}$	$\beta^{o}\beta'$	$\beta^{o}\beta'^{o}$	$\beta^{o}\beta$	$\beta^{o}\beta^{o}$
Kb	KbSa	KbSKa	Kba	KbKa	KbSb	KbSKb	Kbb	KbKb

Bibliographie

Kaehr, Rudolf, The Book of Diamonds. Glasgow 2007. Digitalisat: http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond-Theory-Collection.pdf

Schubert, Horst, Kategorien. 2 Bde. Heidelberg 1970

Toth, Alfred, Äpfel und Birnen. Bd. 2.: Spuren. München 2010a (erscheint als Teil der Ges. Werke)

Toth, Alfred, Die oktadische semiotische Spurenmatrix. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010b

7.7.2010